

## 1. DIAGRAMA DE FASES DE LOS SISTEMAS LINEALES

En esta sección estudiaremos las trayectorias de los sistemas

$$X' = AX$$

para matrices  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  donde  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Suponemos que  $A$  es no singular, i.e. el único punto de equilibrio del sistema es  $(0, 0)$ . El caso de las matrices singulares se deja como ejercicio.

Notaremos  $P$  la matriz no singular de paso a la forma de Jordan (real):

$$J = P^{-1}AP.$$

La matriz  $J$  podrá adoptar 4 formas distintas según los autovalores de  $A$ .

1.  $A$  tiene dos autovalores reales distintos  $\lambda_1 > \lambda_2$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(Suponer  $\lambda_1 > \lambda_2$  no es una restricción, sólo depende de la elección adecuada de la matriz  $P$ .)

2.  $A$  tiene un único autovalor  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  y  $\dim \mathbf{N}(A - \lambda I) = 2$ , entonces  $P = I$  y:

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.  $A$  tiene un único autovalor  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  y  $\dim \mathbf{N}(A - \lambda I) = 1$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4.  $A$  tiene 2 autovalores complejos conjugados:  $\lambda_1 = a + ib$ , con  $b > 0$ , y  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - ib$ , entonces

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(Suponer  $b > 0$  no es una restricción, sólo depende de la elección adecuada de la matriz  $P$ .)

Si  $P = (P^1, P^2)$  y si

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

es solución de  $Y' = JY$ , entonces  $X(t) = PY(t) = y_1(t)P^1 + y_2(t)P^2$  es solución de  $X' = AX$ . Luego, el diagrama de fases en el plano  $(x_1, x_2)$  de la solución de  $X' = AX$  se obtiene del diagrama de fases en el plano  $y_1, y_2$  de la solución de  $Y' = JY$  mediante transformación lineal de matriz  $P$ .

**1.1. A tiene dos autovalores reales distintos.** Si  $A$  tiene dos autovalores reales distintos,  $\lambda_1 > \lambda_2$ , su forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y las soluciones del sistema  $Y' = JY$  son de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad \text{con } Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

El origen es un punto de equilibrio luego es una trayectoria estacionaria. Además los semi-ejes positivos y negativos son trayectorias correspondientes a  $(c_1, c_2) = (c_1, 0)$  con  $c_1 > 0$  para el semi-eje horizontal positivo y  $c_1 < 0$  para el semi-eje horizontal negativo, y  $(c_1, c_2) = (0, c_2)$  con  $c_2 > 0$  para el semi-eje vertical positivo y  $c_2 < 0$  para el semi-eje vertical negativo. Luego, las trayectorias no pueden cortar los ejes y se tienen que circunscribir al cuadrante en el que se ubica el punto de partida  $(y_1(0), y_2(0)) = (c_1, c_2)$ .

Para  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ , despejando  $t$  de  $y_i$  para  $i = 1, 2$  se tiene

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{y_1}{c_1} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{y_2}{c_2}$$

luego

$$(1) \quad y_2 = c_2 \left( \frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

y, dado que  $\lambda_1 > \lambda_2$

$$(2) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} \left( \frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$$

y

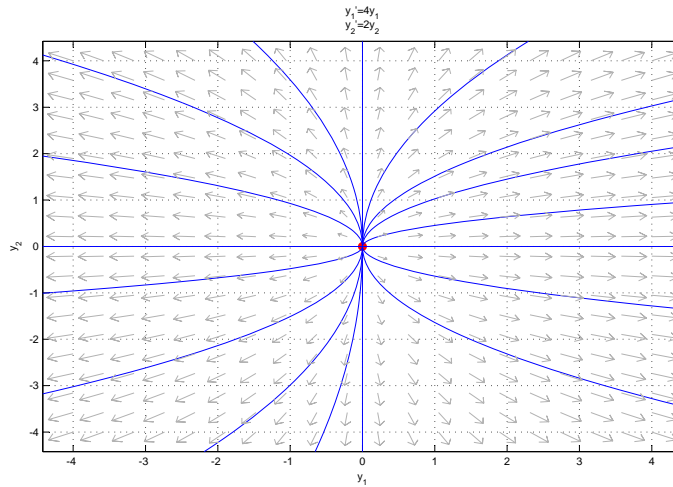
$$(3) \quad \frac{d^2 y_2}{dy_1^2} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1^2 \lambda_1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2}.$$

**1er caso:  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$**

El origen es inestable cuando  $t \rightarrow \infty$  pero es globalmente asintóticamente estable cuando  $t \rightarrow -\infty$ , luego todas las trayectorias “proceden” del origen.

Dado que  $0 < \lambda_2/\lambda_1 < 1$  y teniendo en cuenta (1), (2) y (3):

- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el primer cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y cóncava de  $y_1$ ;
- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el segundo cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y cóncava de  $y_1$ ;

FIGURA 1. Nodo inestable-Sistema  $Y' = JY$ .

- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y convexa de  $y_1$ ;
- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el cuarto cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y convexa de  $y_1$ .

Además, dado que  $\lambda_2/\lambda_1 - 1 < 0$ , de (2) deducimos que

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{dy_2}{dy_1} = \pm\infty$$

por lo que todas las trayectorias (correspondientes a  $c_2 \neq 0$ ) son tangentes al eje vertical en el origen.

En este caso *el origen es un nodo inestable*.

**2º caso:**  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

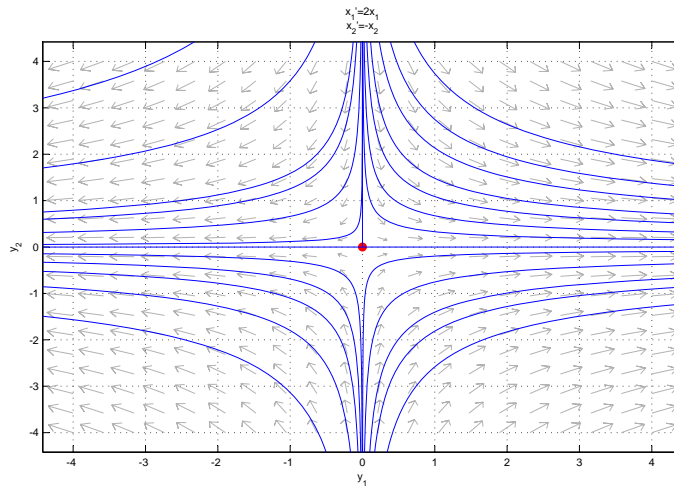


FIGURA 2. Punto de silla - Sistema  $Y' = JY$ .

El origen es inestable. Dado que  $\lambda_2/\lambda_1 < 0$  de (1) deducimos que las trayectorias en el interior de los 4 cuadrantes tienen aspecto de hipérbola con los correspondientes semi-ejes como asíntotas.

Dado que  $\lambda_2/\lambda_1 < 0$  y teniendo en cuenta (1), (2) y (3):

- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el primer cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y convexa de  $y_1$ ;
- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el segundo cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y convexa de  $y_1$ ;
- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y cóncava de  $y_1$ ;
- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el cuarto cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y cóncava de  $y_1$ .

El recorrido se hace en el sentido indicado por el campo de direcciones de la figura 2 y 12.

*El origen es un punto de silla.*

**3<sup>er</sup> caso:**  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$

En este caso el origen es globalmente asintóticamente estable. El cociente  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  y las trayectorias tienen aspecto de parábolas.

Dado que  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  y teniendo en cuenta (1), (2) y (3):

- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el primer cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y convexa de  $y_1$ ;
- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 > 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el segundo cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y convexa de  $y_1$ ;
- si  $c_1 < 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e  $y_2$  es una función creciente y cóncava de  $y_1$ ;
- si  $c_1 > 0$  y  $c_2 < 0$  la correspondiente trayectoria se circunscribe en el cuarto cuadrante e  $y_2$  es una función decreciente y cóncava de  $y_1$ .

Además, de (2) deducimos que

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{dy_2}{dy_1} = 0$$

por lo que las trayectorias (correspondientes a  $c_1 \neq 0$ ) son tangentes al eje horizontal en el origen.

En este caso *el origen es un nodo estable.*

**1.2. A tiene un único autovalor  $\lambda$  y  $\dim \mathbf{N}(A - \lambda \mathbf{I}) = 2$ .** En este caso  $A = \lambda \mathbf{I}$ . Para  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$  podemos utilizar (1). Vemos entonces que todas las trayectorias, salvo el punto de equilibrio, son semi-rectas que se originan en ese punto de equilibrio, incluidos los semi-ejes verticales y horizontales. Si  $\lambda < 0$  el origen es globalmente asintóticamente estable y las trayectorias se recorren hacia el origen. Si  $\lambda > 0$  el origen es inestable (es

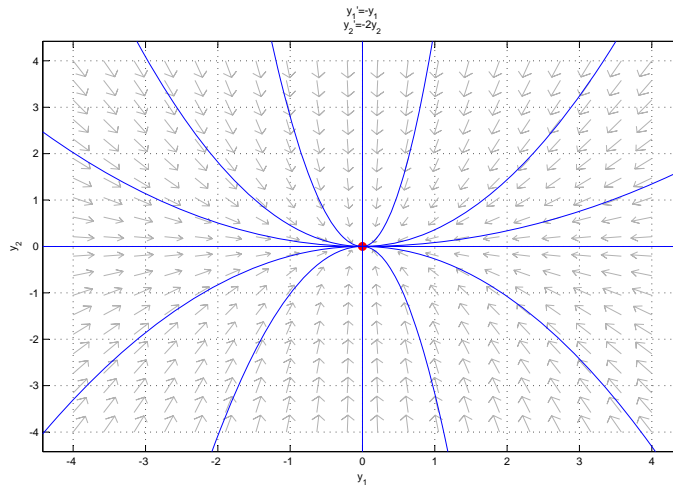
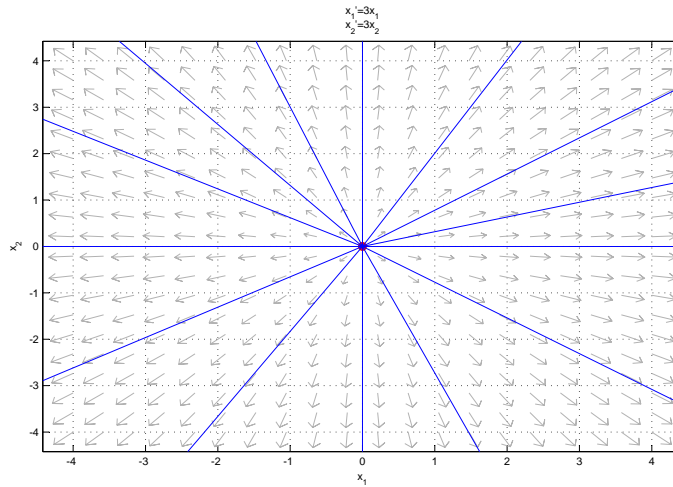


FIGURA 3. Nodo estable - Sistema  $Y' = JY$ .

globalmente asintóticamente estable cuando  $t \rightarrow -\infty$ ) y el recorrido se hace en el sentido opuesto al origen (ver figuras 4 y 5).

**1.3. A tiene un único autovalor  $\lambda$  y  $\dim N(A - \lambda I) = 1$ .** La forma canónica de Jordan de la Matriz  $A$  es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

FIGURA 4. Punto estrella inestable  $\lambda = 3$ .

y las soluciones del sistema  $Y' = JY$  son de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad \text{con } Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la expresión de  $y_2$  deducimos que

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2}$$

y sustituyendo en la expresión de  $y_1$  obtenemos:

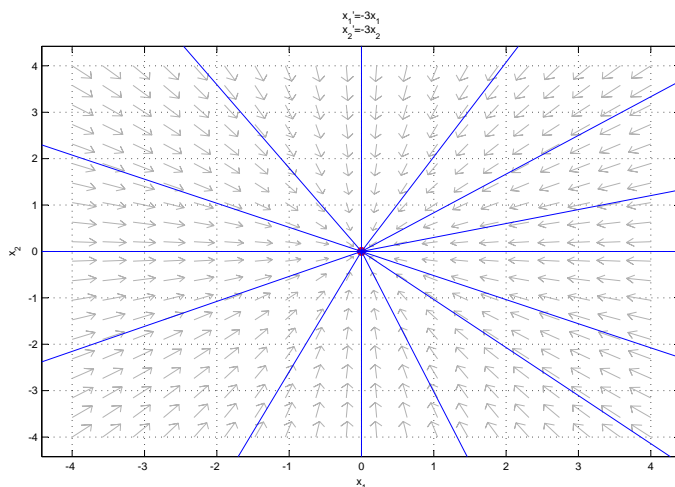


FIGURA 5. Punto estrella estable  $\lambda = -2$ .

$$(4) \quad y_1 = \left( c_1 + c_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2} \right) \frac{y_2}{c_2} = \left( \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2} \right) y_2.$$

Derivando en  $y_2$  obtenemos:

$$(5) \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \left( \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2} \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda y_2}.$$

Si  $\lambda > 0$  el origen es inestable i.e.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t)| = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |y_i(t)| = 0.$$



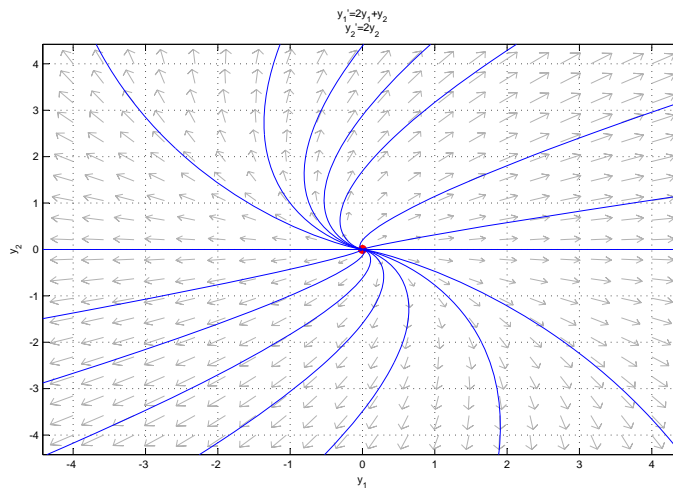


FIGURA 6. Nodo impropio inestable.

Entonces *el origen es un nodo impropio inestable*.

Si  $\lambda < 0$  el origen es globalmente asintóticamente estable i.e.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t)| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |y_i(t)| = +\infty.$$

Entonces *el origen es un nodo impropio estable*.

Además,

$$\frac{dy_1}{dy_2} = 0 \quad \text{sobre la recta} \quad y_2 = -\lambda y_1$$

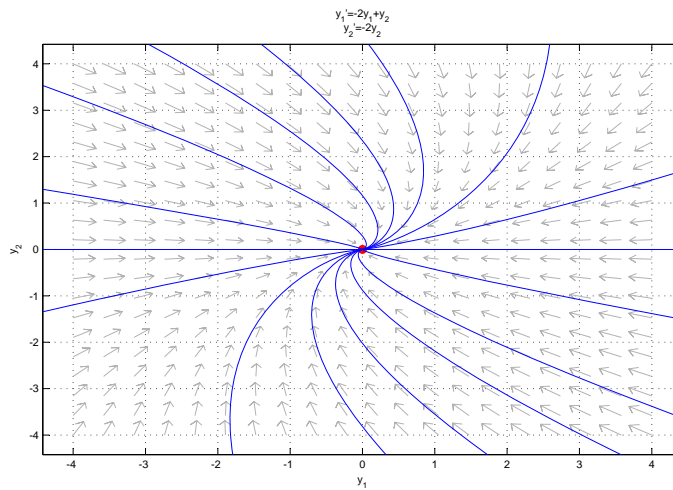


FIGURA 7. Nodo impropio estable.

luego las trayectorias cruzan esta recta con tangente vertical.

Finalmente, Para  $\lambda > 0$  o  $\lambda < 0$  tenemos

$$\lim_{\lambda t \rightarrow -\infty} \left| \frac{dy_1}{dy_2} \right| = \lim_{\lambda t \rightarrow -\infty} \left| \frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{\lambda} \right| = \lim_{\lambda t \rightarrow -\infty} \left| \frac{c_1 + c_2 t}{c_2} + \frac{1}{\lambda} \right| = \infty$$

luego las trayectorias salen del origen ( $\lambda > 0$ ) o llegan al origen ( $\lambda < 0$ ) con tangente horizontal (ver figuras 4 y 5).

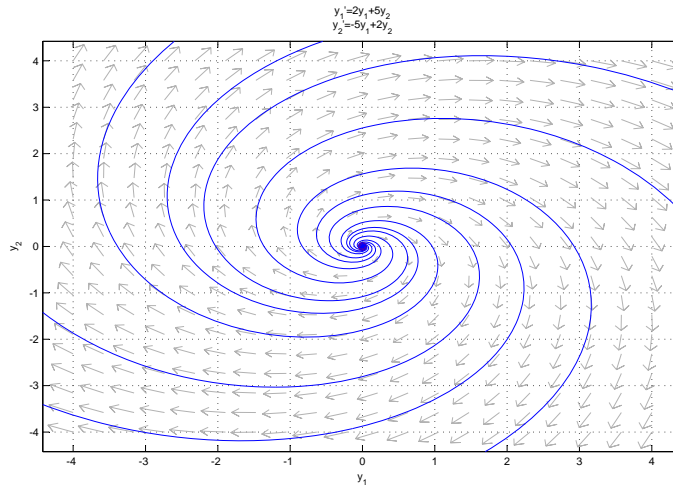


FIGURA 8. Foco inestable.

**1.4.**  $A$  tiene 2 autovalores complejos conjugados,  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$ . Entonces

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda = a + ib$ , con  $b > 0$ . La matriz  $P = (P^1, P^2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  donde  $P^1 + iP^2$  es un autovector asociado a  $\lambda$ :  $A(P^1 + iP^2) = \lambda(P^1 + iP^2)$ .

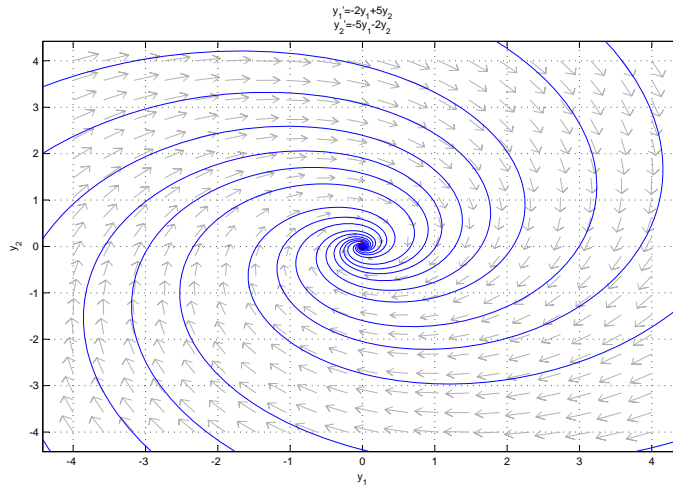


FIGURA 9. Foco estable.

La matriz fundamental  $\Phi_J$  del sistema  $Y' = JY$  que verifica  $\Phi_J(0) = I$  es

$$\Phi_J(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \text{sen } bt \\ -\text{sen } bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \Phi_J(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} c_1 \cos bt + c_2 \text{sen } bt \\ -c_1 \text{sen } bt + c_2 \cos bt \end{pmatrix}$$

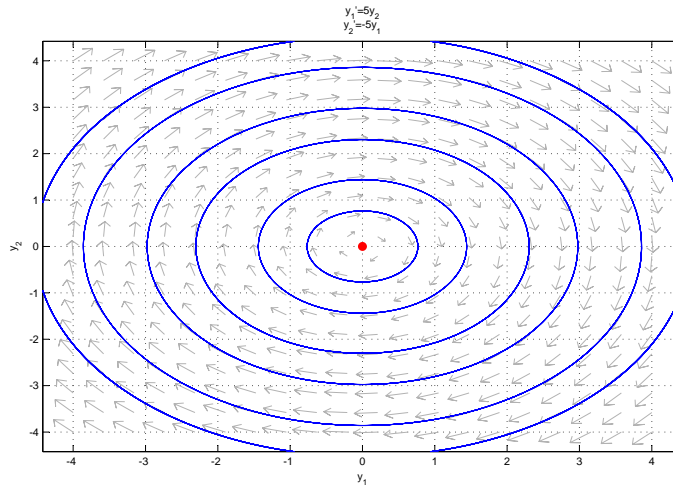


FIGURA 10. Centro.

es la solución de  $Y' = JY$  que satisface

$$Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

y

$$X(t) = (c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt) P^1 + (-c_1 \operatorname{sen} bt + c_2 \cos bt) P^2$$

es la solución del sistema  $X' = AX$  que verifica

$$X(0) = c_1 P^1 + c_2 P^2.$$

Definimos

$$\begin{cases} r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \theta \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{at}r(\cos \theta \cos bt + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} bt) &= e^{at}r \cos(\theta - bt) \\ y_2(t) &= e^{at}r(-\cos \theta \operatorname{sen} bt + \operatorname{sen} \theta \cos bt) &= e^{at}r \operatorname{sen}(\theta - bt). \end{aligned}$$

Luego las trayectorias giran alrededor del origen con velocidad angular  $-b < 0$  (i.e. en sentido del giro de las agujas del reloj)

- acercándose si  $a < 0$ , ***el origen es un foco estable*** (es globalmente asintóticamente estable);
- manteniendo la distancia si  $a = 0$ , entonces ***el origen es un centro*** (es estable);
- alejándose si  $a > 0$ , ***el origen es un foco inestable***.

Si  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  representa la solución del sistema  $Y' = JY$ , las soluciones del sistema  $X' = AX$  vienen dadas por la transformación lineal

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P} \mathbf{Y}(t) = y_1(t)\mathbf{P}^1 + y_2(t)\mathbf{P}^2$$

donde  $P^i$  son las columnas de  $P$ , matriz de paso de  $A$  a  $J$ .

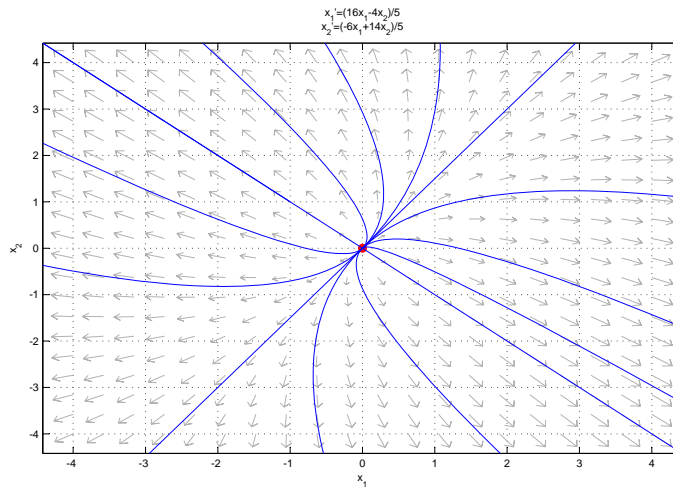
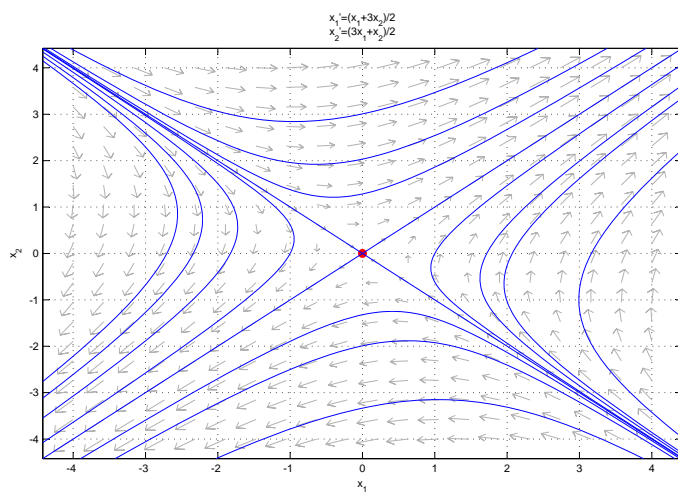


FIGURA 11. Nodo inestable  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .

FIGURA 12. Punto de silla  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ .



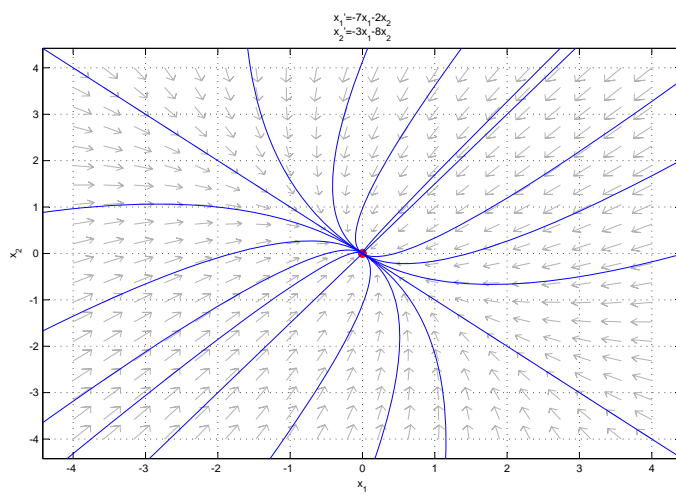


FIGURA 13. Nodo estable  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ .

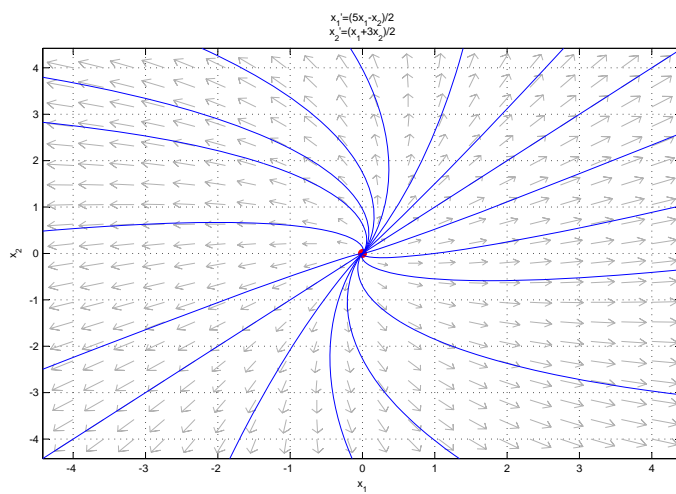


FIGURA 14. Nodo impropio inestable.

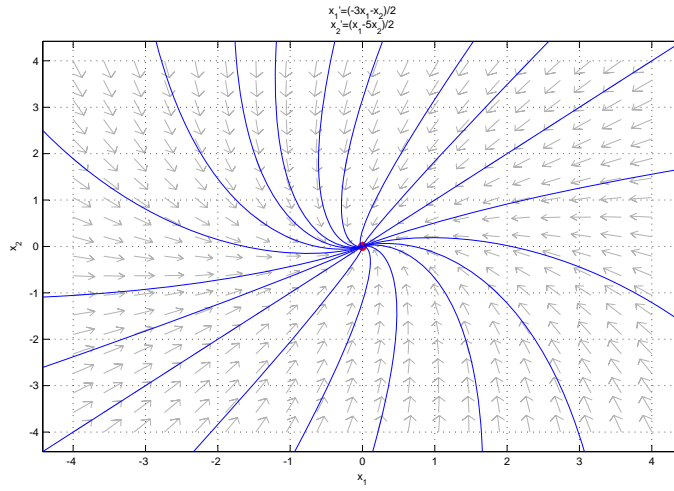


FIGURA 15. Nodo impropio estable.

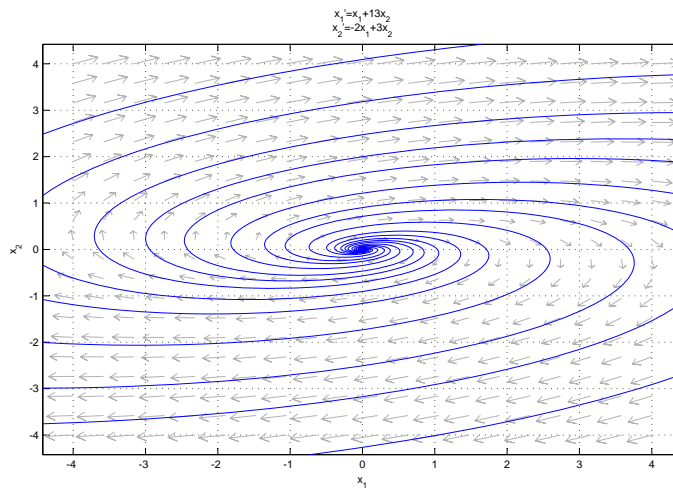


FIGURA 16. Foco inestable.

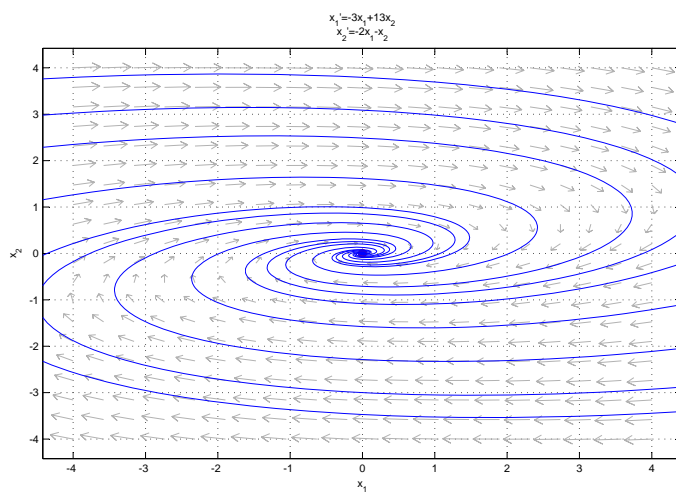


FIGURA 17. Foco estable.

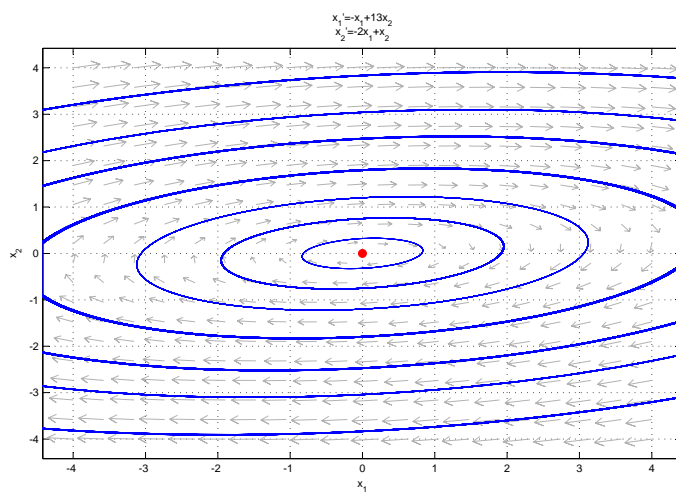


FIGURA 18. Centro.